第 41 卷 第 6 期
2024 年 12 月

应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics

Vol. 41 No. 6
Dec. 2024

文章编号:1000-4939(2024)06-1317-10

基于裂纹系的砼轴拉构件亚临界扩展研究

郑涛,王桂尧,张永杰

(长沙理工大学土木工程学院,410114 长沙)

摘　要:普通混凝土构件存在多裂纹的特点,现有的单裂纹模型仅反映了构件的抗裂能力,而没有反映构件内部在极限荷载之前既已发生的有害的裂纹发展情况。针对这一问题,提出采用裂纹系模型研究混凝土构件的亚临界扩展过程。为简化,选取轴拉构件为研究对象,以缝端微裂纹区模型为基础建立了楔形的单裂纹模型,并以几何分布参数——裂纹平均间距、裂纹初始长度及其数量百分比为框架建立了由单裂纹模型串式排列而成的裂纹系模型。采用该模型模拟了轴拉构件的受拉试验和断裂试验,结果表明选取合适的参数后模型能够准确反映混凝土宏观断裂过程和微观裂纹扩展过程,并且对于含预制裂缝试件,裂纹总数为实际数量的裂纹系模型结果与现有单裂纹模型结果吻合。采用该模型的分析表明,混凝土亚临界扩展过程源于混凝土初始裂纹系由长到短逐级开展;其真实起裂点远早于通常试验观测到的起裂点,其失稳点——失稳韧度可以通过减小混凝土初始裂纹系最小长度提高。

关键词:断裂;裂纹系模型;统计学参数;亚临界扩展;混凝土断裂;试验模拟

中图分类号:TU37　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2024.06.011

A crack-system model for subcritical crack propagation in concrete members under axial tension

ZHENG Tao, WANG Guiyao, ZHANG Yongjie

(School of Civil Engineering, Changsha University of Science & Technology, 410114 Changsha, China)

Abstract: In view of the multiple-crack characteristics of ordinary concrete members, the current theory based on the single crack model only reflects the ultimate crack resistance of the member, but does not reflect the harmful crack development inside the member before the ultimate load. A crack-system model was proposed to study the subcritical crack propagation process. For simplicity, the axial tension member was selected as the research object. First, a wedge-shaped model of single crack was established based on the micro-crack zone model of crack tip. Then, a crack-system model consisting of single crack arranged in string was established based on the geometric distribution parameters: average crack spacing, initial crack length and its number percentage. The results of simulating tensile test and fracture test of axial tension members show that the crack-system model can accurately reflect the macro fracture process and micro

收稿日期:2022-05-07　　**修回日期**:2022-10-19

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 51878071);湖南省研究生科研创新资助项目(No. CX20210768)

通信作者:王桂尧,教授。E-mail:wanggy688@163.com

引用格式:郑涛,王桂尧,张永杰. 基于裂纹系的砼轴拉构件亚临界扩展研究[J]. 应用力学学报,2024,41(6):1317-1326.
ZHENG Tao, WANG Guiyao, ZHANG Yongjie. A crack-system model for subcritical crack propagation in concrete members under axial tension [J]. Chinese journal of applied mechanics, 2024, 41(6):1317-1326.

crack growth with appropriate parameters. For the specimen with prefabricated cracks, the results of the crack system model with the total number of cracks being the actual number are consistent with the results of the existing single-crack model. The further analysis using this model indicates that the subcritical crack propagation of concrete should be due to the progressive development of initial cracks in sequence from long to short; and the real crack initiation point is much earlier than that observed by normal tests, and the instability toughness can be improved by reducing the minimum length of the initial cracks.

Key words: fracture; crack-system; statistical parameters; subcritical crack propagation; concrete fracture; experiment simulation

混凝土受拉 I 型裂纹的扩展过程存在明显的亚临界扩展特征[1-3]。在虚拟裂缝模型的基础上，徐世烺等[4-5]采用紧凑拉伸试件进行断裂试验，根据实测的荷载值 P 及裂缝扩展长度 Δa 反算弹性等效的应力强度因子 K，并绘制 K-Δa 曲线（即 K_R 阻力曲线），确定了阻力曲线上对应于稳定扩展期起点和终点的起裂韧度和失稳韧度；之后提出根据实测的 P-CMOD 曲线计算起裂韧度和失稳韧度的方法，认为裂纹前端断裂过程区内的黏聚力是稳定扩展期的附加扩展阻力，其产生的黏聚韧度提供了 K_R 阻力曲线上从起裂韧度到失稳韧度的曲线段；上述研究即以应力强度因子 K 为计算指标的双 K 断裂准则及双 K 参数控制的 K_R 阻力曲线。其后赵艳华等[6]分析了稳定扩展期内裂纹沿扩展方向的能量特征，提出了以能量释放率 G 为计算指标的双 G 断裂准则。徐世烺等[7]进一步提出“水泥凝胶-细骨料-粗骨料”三级开裂机制，阐述了“微观起裂-宏观起裂-失稳”三临界点的新型裂纹扩展过程。

以上成果从物理角度解释了混凝土亚临界扩展现象，阐述了混凝土裂纹在加载-起裂-失稳全过程的扩展阻力规律。但这些研究均以无限大或半无限大平板内的单裂纹为理论模型，对于预制单裂缝的试件、含有长裂缝的大坝等具有显著主裂纹的结构体适用性良好，对于结构工程中的普通混凝土构件则存在理论上不协调的地方。因为普通混凝土构件的宏观裂缝通常由初始裂纹发育而来，不论裂缝发展初期或末期，通常都会有多条量级相近的裂纹同时扩展，不存在某个占主导地位的单独的裂纹，所以这类构件不能简化为单裂纹模型，只能按裂纹系模型考虑。而且即便前述成果可以外推到裂纹系的情况，现阶段数学上能够处理的裂纹系也仅限于周期排列的等长裂纹，与真实裂纹分布情况相差甚远。针对普通混凝土构件开裂的问题，通行的做法是忽略混凝土亚临界扩展过程的细节，根据试验测定的抗裂极限应变，仅计算失稳扩展临界荷载；如过镇海等[8]的研究。目前来看，对于必须考虑裂纹系的普通混凝土构件，其亚临界扩展过程的规律并不明晰。对于在亚临界扩展过程中既已发生的裂纹生成及扩展情况，实际上缺少可用的估计方法，从而难以针对性地防范这类有害的早期开裂。所以，本研究以受力状态最为简单的受拉 I 型裂纹构件-轴拉构件为研究对象，采用线弹性断裂力学方法，通过合理简化的裂纹及裂纹系模型，分析裂纹系扩展规律，推导能够反映各个裂纹扩展状态和构件断裂过程的裂纹系特征参数，合理地解释混凝土轴拉构件亚临界扩展现象的原因，并定量描述其发展过程，以期为混凝土构件抗裂问题提供参考数据。

1 混凝土构件裂纹系模型的提出与构建

1.1 混凝土构件楔形单裂纹模型

黎保琨等[1]测得的试件断裂时裂纹尖端张开位移值明显小于金属材料对应值，表明混凝土裂尖部位的变形更接近脆性材料变形。这样裂纹尖端长度 r_0 可根据线弹性断裂力学和 Mises 屈服条件[9-10]进行估算，即

$$r_0 = \frac{K_C^2}{2\pi\sigma_y^2} \cdot (1 - 2\mu)^2 \tag{1}$$

式中：σ_y 为屈服极限；μ 为泊松比；K_C 为混凝土断裂韧度（对应于虚拟裂缝模型的起裂韧度）。此时裂纹尖端后缘处的裂纹张开位移（平面应变条件）为

$$S_{CTOD_C} = \frac{8K_C(1 - \mu^2)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r_0}{2\pi}} \tag{2}$$

式中，E 为混凝土弹性模量。假定内部裂纹沿对称轴两侧均为楔形（裂纹整体为长对角线为裂纹长度的菱形），则裂纹尖端夹角 $2\theta_C$ 可以根据三角函数进行计算，即

$$\theta_C = \arctan \frac{S_{CTOD_C}/2}{r_0} = \arctan\left(\frac{4\sigma_y}{E}\cdot\frac{1-\mu^2}{1-2\mu}\right) \tag{3}$$

屈服极限 σ_y 不等于通常所称的抗拉强度 f_t(抗拉强度实际是假定截面面积不变的名义平均应力),前者大约是后者的 10 倍;在普通混凝土强度范围内,取 $\sigma_y = 27.9$ MPa,$E = 32\ 400$ MPa,$\mu = 0.20$,则 $\theta_C \approx 5.5\times10^{-3}$ rad。

假设裂纹起裂过程为:初始状态裂纹完全闭合;起裂开始后裂纹端部角由 0 逐渐增大至临界值 $2\theta_C$,但长度不变;之后荷载稍有增加裂纹即发生扩展,扩展过程中裂纹长度增加,但端部角不变。定义裂纹宽度 ω 为裂纹在对称轴处的张开位移,则对于即将扩展和正在扩展的裂纹,裂纹长度 a 与裂纹宽度 ω 的关系为

$$a = \omega\cdot\cot\theta_C \tag{4}$$

楔形单裂纹模型如图 1 所示。

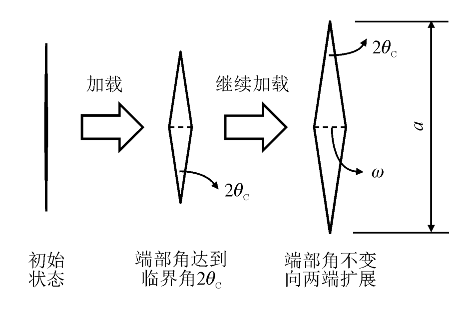


图 1　楔形单裂纹模型

Fig. 1　Wedge model of single crack

1.2　混凝土构件串式裂纹系模型

对轴拉构件裂纹系模型作如下 3 个假定:①构件初始裂纹均完全闭合;②构件初始裂纹均垂直于构件纵轴平行排列,并且裂纹之间的距离足够远;③构件在加载过程中产生的宏观裂纹都来自于初始裂纹的张开及扩展,并且扩展方向沿初始裂纹方向。

对于假定①,轴拉试验观测到的试件表面裂纹宽度随加载的变化为:发现时约 0.04 ~0.08 mm,沿截面周边贯通时约 0.1 ~0.2 mm,沿全截面贯通(即构件破坏)时约 0.1 ~0.2 mm[11];而 HSU 等[12]和 LIU 等[13]试验观测到的受荷前裂纹宽度大部分为 $(2\sim5)\times10^{-3}$ mm,相比较下裂纹初始宽度可忽略不计。对于假定②和假定③,一般认为宏观裂纹发展自混凝土内部的薄弱部位,如粗细骨料界面等,而这些部位也是初始裂纹的产生处;同时宏观裂纹总体上垂直于主拉应力方向扩展,而主拉应力方向即构件纵轴方向;另外初始裂纹尺寸相较于构件尺寸通常很小,可近似认为裂纹处于无限大平面内。这样,相邻裂纹之间的横截面就可以视为无限大平面的边界,截面上作用的均布应力可以视为该无限大平面的远场应力,从而每条初始裂纹都可以视为均布远场应力垂直于裂纹长度方向的无限大平面内的单裂纹。

将所有初始裂纹按长度由大到小分为 m 级,各级裂纹的长度和数量分别记作 a_1, a_2, …, a_k, …, a_m 和 n_1, n_2, …, n_k, …, n_m。对于无预制裂缝的试件,各级裂纹的长度和数量应该符合由材料本身决定的某种概率分布规律,如正态分布;对于有预制裂缝的试件(预制裂缝共 t 条),通常情况下前 t 级裂纹为预制裂缝,其长度和数量由试验人选定,而第 t 级之后的各级裂纹仍然符合原有的概率分布规律。这两种工况的模型如图 2 所示,由于各级裂纹如同被中心纵轴线依次串起,所以本研究称之为串式裂纹系模型。

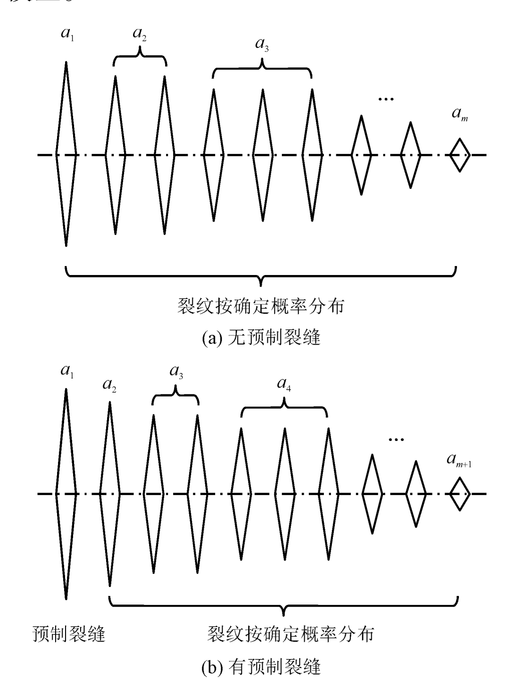


图 2　轴拉构件串式裂纹系模型

Fig. 2　String model of crack systemfor axial tension member

对模型加载过程中,当外荷载拉力产生的截面应力为 q 时,各级裂纹尖端的应力强度因子 K_i 为

$$K_i = q\sqrt{\pi a_i} \tag{5}$$

这表明较长的裂纹将更早地达到断裂韧度 K_C,所以裂纹发生扩展的时间先后由其初始长度 a_i 决定:长裂纹先扩展,短裂纹后扩展;即第 1 级裂纹首先扩展,接着是第 2 级、第 3 级,以此类推,直到第

m 级。

假设裂纹扩展过程中某时刻构件伸长 δ 长度，此时构件纵向应变为 ε，类似于钢筋混凝土无滑移裂缝的情况，有

$$\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \omega_i = L \cdot \varepsilon \tag{6}$$

式中：L 为构件长度；ω_i 为各级裂纹宽度。记裂纹总数为 n，则该时刻平均裂纹宽度 ω_{mean} 与构件应变的关系为

$$\omega_{\text{mean}} = \frac{L}{n} \cdot \varepsilon \tag{7}$$

正常养护条件下，构件内初始裂纹沿纵轴方向分布应该是均匀的，且仅与养护条件和混凝土抗拉强度 f_t 有关；所以系数 $\frac{L}{n}$ 表征了裂纹系的几何分布参数——平均裂纹间距 l_{mean}，同时也表征了裂纹沿构件长度方向分布的密度，应为与构件长度无关的常量。从而式(7)可改写为

$$\omega_{\text{mean}} = l_{\text{mean}} \cdot \varepsilon \tag{8}$$

根据假定③，上述平均间距实际也是初始裂纹系的平均间距。利用参数 l_{mean} 可以进一步讨论假定②中裂纹间距足够远的问题。根据文献[14]中无限大板内“一列奇数条平行裂纹受均匀拉伸”的解答，在最不利条件下，当裂纹间距与裂纹长度之比大于4.6时，按独立裂纹计算的偏差已在5%以内，此时可认为裂纹之间的相互影响已能够忽略。由后文中第3.1节的计算可知，通常条件下平均裂纹间距大于100 mm，而初始裂纹长度小于2 mm，满足假定②的要求。

对受弯构件，由于控制其抗裂性能的主要是沿构件底边向上部扩展的边裂纹，而这些裂纹基本同样满足上述轴拉裂纹系模型的3个假定，且各级裂纹的长度和数量符合由材料本身决定的概率分布规律，仅应力强度因子的计算略有差异。根据文献[14]，对受弯的单边裂纹，当裂纹长度显著小于截面高度时，其裂尖应力强度因子 K_i^{B} 为

$$K_i^{\text{B}} = 1.122 q^{\text{B}} \sqrt{\pi a_i} \tag{9}$$

式中，q^{B} 为外荷载弯矩产生的受拉边缘应力。同时，受弯构件的裂缝宽度取底边位置的裂缝宽度，实际就是楔形裂纹在原对称轴处的张开位移，与轴拉构件模型一致。所以，只需要将轴拉应力 q 替换为弯曲应力 q^{B}，并将应力强度因子乘以系数1.122，就可以利用串式裂纹系模型模拟弯拉I型断裂，对应模型如图3所示。限于篇幅，本研究主要讨论轴拉构件的裂纹系模型。

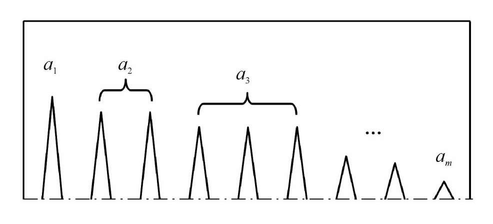


图3 受弯构件串式裂纹系模型

Fig. 3 String model of crack system for flexural member

2 基于串式裂纹系模型的亚临界扩展过程

加载过程中裂纹系将由长到短逐级扩展。从第1级裂纹开始扩展到第 m 级裂纹即将扩展，裂纹扩展阻力逐级增大，阻力和驱动力保持平衡，构件维持稳定的裂纹扩展状态；第 m 级裂纹开始扩展后，构件没有新的裂纹来产生更多的阻力，驱动力将超过阻力，构件将立即失稳破坏；所以第1级裂纹开始扩展到第 m 级裂纹即将扩展的过程即为混凝土亚临界扩展过程。

按照串式裂纹系模型，第 k 级裂纹即将扩展时的截面应力 q_k 为

$$q_k = \frac{K_{\text{C}}}{\sqrt{\pi a_k}} \tag{10}$$

注意到第 m 级裂纹即将扩展时的截面应力即为抗拉强度 f_t，从而式(10)可改写为

$$q_k = f_t \sqrt{\frac{a_m}{a_k}} \tag{11}$$

此时该级裂纹尖端的应力强度因子恰好等于混凝土断裂韧度 K_{C}，即

$$K_{\text{C}} = q_k \sqrt{\pi a_k} \tag{12}$$

而此时任意第 i 级裂纹端部的应力强度因子 $K_{k,i}$ 为

$$K_{k,i} = K_{\text{C}} \sqrt{\frac{a_i}{a_k}} \tag{13}$$

由第1级裂纹向第 m 级裂纹发展的亚临界扩展过程中，第 k 级应力作用下第 i 级裂纹的长度记为 $a_{k,i}$，第 i 级裂纹相对上一级应力的扩展长度记为 $\Delta a_{k,i}$。易知当 $i \geqslant k$ 时，$\Delta a_{k,i} = 0$。

第 k 级应力作用下，前 k 级裂纹(记为 j)均已经进入或即将进入扩展阶段，裂纹端部完全张开，而第 k 级以后的裂纹(记为 l)仍未扩展，裂纹端部未完全

张开。此时第 j 级裂纹的宽度为

$$\omega_{k,j}=(a_{k-1,j}+\Delta a_{k,j})\cdot\tan\theta_C\ ,j\leqslant k \tag{14}$$

第 l 级裂纹的宽度需根据各级裂纹端部角 $2\theta_{k,l}$ 计算。考虑前后级应力作用下混凝土弹性模量软化,此部分裂纹的端部张开位移 $S_{\mathrm{CTOD}_{k,l}}$ 为

$$S_{\mathrm{CTOD}_{k,l}}=\frac{8K_{k,l}(1-\mu^2)}{E_k}\sqrt{\frac{r_0}{2\pi}} \tag{15}$$

式中,E_k 为实测应力-应变曲线或荷载-位移曲线对应于 q_k 的割线模量。而第 l 级裂纹完全张开时的端部张开位移 S_{CTOD_C} 实际为 $S_{\mathrm{CTOD}_{l,l}}$,所以有

$$\frac{\tan\theta_{k,l}}{\tan\theta_C}=\frac{S_{\mathrm{CTOD}_{k,l}}/(2r_0)}{S_{\mathrm{CTOD}_{l,l}}/(2r_0)}=\frac{E_l}{E_k}\sqrt{\frac{a_l}{a_k}} \tag{16}$$

这样第 l 级裂纹的宽度为

$$\omega_{k,l}=a_l\cdot\tan\theta_{k,l}=\frac{E_l}{E_k}\sqrt{\frac{a_l}{a_k}}\cdot a_l\cdot\tan\theta_C\ ,l>k \tag{17}$$

式(17)对第 k 级裂纹同样成立,则第 k 级应力作用下平均裂纹宽度 ω_{mean}^k 为

$$\omega_{\mathrm{mean}}^k=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{k-1}[n_i\cdot(a_{k-1,i}+\Delta a_{k,i})\cdot\tan\theta_C]\right\}+\frac{1}{n}\left[\sum_{i=k}^{m}\left(n_i\cdot\frac{E_i}{E_k}\sqrt{\frac{a_i}{a_k}}\cdot a_i\cdot\tan\theta_C\right)\right] \tag{18}$$

引入初始裂纹长度分布密度函数 $\nu(a)$ 来描述各级裂纹的数量百分比,$\nu(a_i)=\dfrac{n_i}{n}$,则式(18)可改写为

$$\omega_{\mathrm{mean}}^k=\sum_{i=1}^{k-1}[\nu(a_i)\cdot(a_{k-1,i}+\Delta a_{k,i})\cdot\tan\theta_C]+\sum_{i=k}^{m}\left[\nu(a_i)\cdot\frac{E_i}{E_k}\sqrt{\frac{a_i}{a_k}}\cdot a_i\cdot\tan\theta_C\right] \tag{19a}$$

当 $k=1$ 时,取等号右边第2项,即

$$\omega_{\mathrm{mean}}^1=\sum_{i=1}^{m}\left[\nu(a_i)\cdot\frac{E_i}{E_1}\sqrt{\frac{a_i}{a_1}}\cdot a_i\cdot\tan\theta_C\right] \tag{19b}$$

第1级裂纹即将扩展时,构件变形达到线弹性阶段的终点,根据式(8),此时构件平均应变为

$$\varepsilon_1=\frac{1}{l_{\mathrm{mean}}}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left[\nu(a_i)\cdot\frac{E_i}{E_1}\sqrt{\frac{a_i}{a_1}}\cdot a_i\cdot\tan\theta_C\right] \tag{20}$$

考察由第 $k-1$ 级应力增加至第 k 级应力的过程($k\geqslant2$),平均裂纹宽度的增量为

$$\omega_{\mathrm{mean}}^k-\omega_{\mathrm{mean}}^{k-1}=\sum_{i=1}^{k-1}[\nu(a_i)\cdot\Delta a_{k,i}\cdot\tan\theta_C]+\sum_{i=k}^{m}\left[\nu(a_i)\cdot\left(\frac{E_i}{E_k}\sqrt{\frac{a_i}{a_k}}-\frac{E_i}{E_{k-1}}\sqrt{\frac{a_i}{a_{k-1}}}\right)\cdot a_i\cdot\tan\theta_C\right],\quad k\geqslant2 \tag{21}$$

由式(8),有

$$\omega_{\mathrm{mean}}^k-\omega_{\mathrm{mean}}^{k-1}=l_{\mathrm{mean}}\cdot(\varepsilon_k-\varepsilon_{k-1})\ ,k\geqslant2 \tag{22}$$

式中,ε_k 表示第 k 级应力作用下构件平均应变,可根据材料力学方法按式(23)计算。

$$\varepsilon_k=\frac{q_k}{E_k} \tag{23}$$

平均应变的增量可表示为

$$\varepsilon_k-\varepsilon_{k-1}=\varepsilon_1\cdot\left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_1}-\frac{\varepsilon_{k-1}}{\varepsilon_1}\right)=\frac{1}{l_{\mathrm{mean}}}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left[\nu(a_i)\cdot\left(\frac{E_i}{E_k}\frac{1}{\sqrt{a_k}}-\frac{E_i}{E_{k-1}}\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}\right)\cdot a_i^{\frac{3}{2}}\cdot\tan\theta_C\right],\quad k\geqslant2 \tag{24}$$

代入式(21)和式(22),可得

$$\sum_{i=1}^{k-1}[\nu(a_i)\cdot\Delta a_{k,i}]=\sum_{i=1}^{k-1}\left[\nu(a_i)\cdot\left(\frac{E_i}{E_k}\frac{1}{\sqrt{a_k}}-\frac{E_i}{E_{k-1}}\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}\right)\cdot a_i^{\frac{3}{2}}\right],\quad k\geqslant2 \tag{25}$$

注意到能量释放率 G 表征了裂纹前缘的势能梯度,应变能密度因子 S 表征了裂纹前缘的势能密度,两者均反映了裂纹扩展趋势的强弱,且均与应力强度因子的平方 K^2 成正比;从而假定裂纹扩展长度正比于应力强度因子的平方,即 $\Delta a\sim K^2$,则第 k 级应力作用下前 k 级裂纹的扩展长度关系为

$$\frac{\Delta a_{k,i}}{\Delta a_{k,j}}=\left(\frac{K_{k-1,i}}{K_{k-1,j}}\right)^2=\frac{a_{k-1,i}}{a_{k-1,j}}\ ,i,j<k\ 且\ k\geqslant3 \tag{26}$$

联立式(25)和式(26)即可利用迭代方法求解各级应力作用下的裂纹扩展长度 $\Delta a_{k,i}$。

值得注意的是,当裂纹总数等于1时,串式裂纹系模型退化为单一裂纹的楔形单裂纹模型。由于楔形单裂纹模型本质上是线弹性裂纹,而现有单裂纹模型本质上是附加塑性断裂过程区的非线性裂纹,两者并不一致,所以裂纹总数为1的退化裂纹系模

型与现有单裂纹模型并不吻合。实际上,现有单裂纹模型是根据预制裂缝试件的试验结果修正的,适用于含预制裂缝或者具有明显主裂缝的情况;仅在这两种情况下,并且裂纹总数为实际数量时,串式裂纹系模型与现有单裂纹模型的计算结果才是吻合的。

3 基于串式裂纹系模型的混凝土构件亚临界扩展过程分析讨论

3.1 裂纹系特征参数

本研究的分析表明,对裂纹系而言,几何分布参数——裂纹平均间距 l_{mean}、用函数 $\nu(a)$ 表示的裂纹初始长度及其数量百分比决定了构件断裂过程和各个裂纹的扩展状态。正常养护条件下,初始裂纹长度分布应该近似服从截断正态分布 $\nu(a_i, a_{\min}, a_{\max}, a_{\mathrm{mean}}, \sigma)$。根据文献[10],能够产生真实扩展的裂纹长度下限(即初始裂纹长度最小值 $a_{\min}$)为

$$a_{\min} = \frac{K_{\mathrm{C}}^2}{\pi\sigma_{\mathrm{y}}^2} \tag{27}$$

根据徐世烺等[4,15]的试验结果,取 $\sigma_{\mathrm{y}} = 27.9$ MPa, $K_{\mathrm{C}} = 0.461\ \mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$,则 $a_{\min} \approx 0.09$ mm。受荷前大部分裂纹的宽度为 $(2 \sim 5) \times 10^{-3}$ mm[12-13],若假定裂纹端部角约等于 $2\theta_{\mathrm{C}}$,则裂纹长度主要分布范围约 0.4 ~ 1.0 mm,所以初始裂纹长度平均值 a_{mean} 约为 0.7 mm。同样根据 HSU 等[12]和 LIU 等[13]的试验结果,初始裂纹长度最大值 $a_{\max}$ 的范围为 1 ~ 2 mm。设想初始裂纹长度分布图像在截断之前,上下限之间的区段内应该具有足够高的面积,比如至少应达到 95%,并取 $a_{\max}$ 等于其取值范围的平均值 1.5 mm,则有

$$1.96\sigma = a_{\mathrm{mean}} - a_{\min} \tag{28}$$

算得 $\sigma = 0.31$。假定平均值具有最高的可能性,则最大似然初始裂纹长度分布参数组合 ν_{std} 为

$$\nu(a_i, a_{\min}, a_{\max}, a_{\mathrm{mean}}, \sigma) = \nu(a_i, 0.09, 1.5, 0.7, 0.31) \tag{29}$$

依据本研究的方法,使用 MATLAB R2016a 编制了计算程序。割线弹性模量比矩阵 $\boldsymbol{E}_i/\boldsymbol{E}_j$ 按下述办法确定:初始刚度比矩阵 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ini}}$ 按初始模量 E_1 与峰值点模量 E_{p} 的比值等于 1.2,中间各级模量值等间距均匀变化进行试算;算出各级应力下的应变 ε_i 后,根据文献[16]规定的应力-应变曲线按式(30)计算新的矩阵。

$$\frac{E_i}{E_{\mathrm{p}}} = \left[1.2\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}\right) - 0.2\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{\mathrm{p}}}\right)^6\right] \tag{30}$$

式中,ε_{p} 为峰值点应变。将新矩阵代入计算程序重新试算,经过较少次数迭代后(本研究的算例为 4 次),结果即收敛。计算流程如图 4 所示。

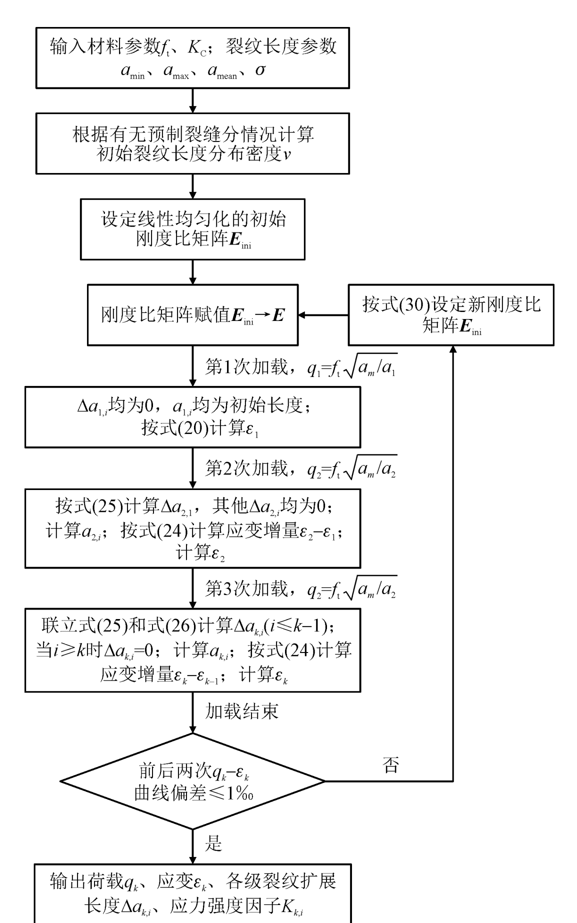


图 4 计算流程图

Fig. 4 Calculation flow chart

如果按照某个假定的初始裂纹长度分布参数组合 ν 计算峰值点应变 ε_{p},根据式(20)和式(24)应有

$$\varepsilon_{\mathrm{p}} = \frac{1}{l_{\mathrm{mean}}} \cdot \tan\theta_{\mathrm{C}} \cdot f(a_i, \boldsymbol{v}_i, E_i) \tag{31}$$

式中:$f(a_i, v_i, E_i)$ 由电算得到;$\tan\theta_{\mathrm{C}}$ 根据混凝土弹性模量 E 和屈服极限 σ_{y} 由式(3)得到。于是可以根据峰值点应变 ε_{p} 反算出平均裂纹间距 l_{mean}。弹性模量 E 和峰值点应变 ε_{p} 与混凝土抗拉强度 f_{t} 之间存在如式(32)和式(33)所表示的关系[16]。

$$\varepsilon_{\mathrm{p}} = 65 \times 10^{-6} f_{\mathrm{t}}^{\ 0.54} \tag{32}$$

$$E = (1.45 + 0.628 f_{\mathrm{t}}) \times 10^4 \tag{33}$$

这表明在试件抗拉强度确定的情况下,平均裂

纹间距 l_{mean} 和初始裂纹长度分布 $\nu(a)$ 并非相互独立的参数,两者作为一个整体参数组成为裂纹系的特征参数。

普通混凝土的抗拉强度约为 0.5 ~2.0 MPa,初始裂纹长度分布按最大似然分布 ν_{std},弹性模量和峰值点应变按式(32) ~(33)计算,并取 $\sigma_y = 10f_t$,由此算得的对应于抗拉强度 0.5、1.0、1.5、2.0 MPa 的平均裂纹间距分别为 104、121、127、128 mm。

模拟普通轴拉试验,根据上述结果计算不同抗拉强度等级试件加载全过程应力和应变,结果按相对应力 q_k/f_t 和相对应变 $\varepsilon_k/\varepsilon_p$ 的方式绘于图 5。

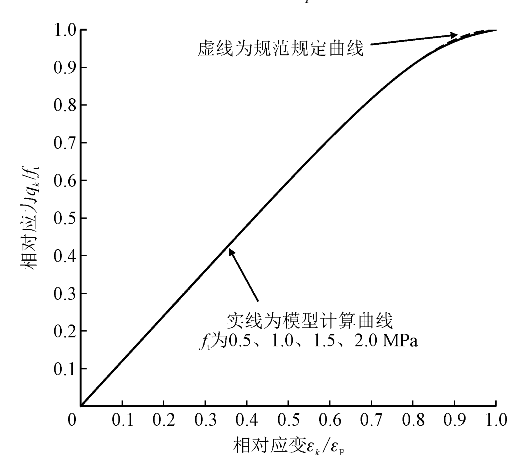


图 5　串式裂纹系模型普通轴拉试验模拟结果

Fig. 5　Simulation results of ordinary axial tensile test based on string model of crack system

图 5 中同时用虚线绘出了规范中规定的曲线[16],可见串式裂纹系模型曲线与规范曲线相当吻合,表明模型参数合理且具有良好的准确度。

3.2　直接拉伸试件亚临界扩展过程

一般通过预制单条裂缝试件的 K_R 阻力曲线研究混凝土亚临界扩展过程。利用串式裂纹系模型可求解该阻力曲线。令 a_1 等于预制裂缝长度,其数量百分比 $\nu^P(a_1)$ 应根据试件长度 L 计算,即

$$\nu^P(a_1) = \frac{l_{\text{mean}}}{L} \tag{34a}$$

a_1 之后的各级裂纹仍然表示初始裂纹,长度同试件初始裂纹分布,但数量百分比需要相应调整,即

$$\nu^P(a_i) = \frac{L/l_{\text{mean}}}{1 + L/l_{\text{mean}}} \cdot \nu(a_{i-1}),\ i \geqslant 2 \tag{34b}$$

其余均同原模型。第 k 级应力作用下预制裂缝端部的应力强度因子为

$$K_1 = K_C \sqrt{\frac{a_{k,1}}{a_k}} \tag{35}$$

此时预制裂缝的扩展长度为

$$\Delta a_1 = \sum_{i=1}^{k} \Delta a_{i,1} \tag{36}$$

模拟直接拉伸试件断裂试验,试件材料参数取抗拉强度 1.0 MPa、平均裂纹间距 121 mm,预制裂缝长度取较小值 10 mm。试件长度为 1 m,预制裂缝的数量百分比为 0.121 9。计算各级应力作用下预制裂缝的缝端相对韧度 K/K_C 及其扩展长度,结果如图 6 所示。

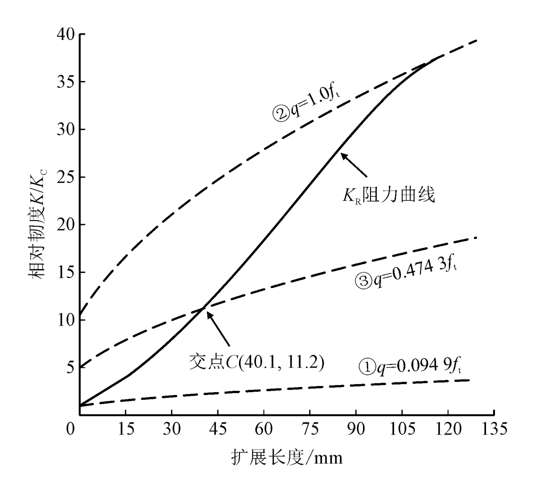


图 6　串式裂纹系模型直接拉伸断裂试验模拟结果

Fig. 6　Simulation results of direct tensile fracture test based on string model of crack system

图 6 中按模型计算的 K_R 阻力曲线清楚显示了预制裂缝随荷载增加而稳定扩展的过程:起点(0,1)表示裂缝不扩展条件下所能达到的最大韧度,即混凝土断裂韧度 K_C,对应于虚拟裂缝模型的起裂韧度;终点(116.5,37.5)表示裂缝所能达到的最大扩展长度 Δa_C,此时的韧度大于 K_C,对应于虚拟裂缝模型的失稳韧度;中间曲线段表示裂缝扩展阻力 K 随扩展长度增大而逐渐增大的现象,即亚临界扩展现象。图 6 中同时用虚线绘出了不同应力 q 作用下预制裂缝端部应力强度因子 K_q 随扩展长度 Δa 变化的曲线。根据串式裂纹系模型,此时的相对韧度为

$$\frac{K_q}{K_C} = \frac{q}{f_t}\sqrt{\frac{a_1 + \Delta a}{a_m}} \tag{37}$$

曲线①对应于预制裂缝即将扩展时的应力值:$q/f_t = q_1/f_t = \sqrt{a_m/a_1} = \sqrt{0.09/10} = 0.0949$,按本研究模型此级应力作用下预制裂缝之后的各级裂纹都不会发生扩展。曲线②对应于最后一级裂纹即将扩展时的应力值:$q/f_t = q_m/f_t = \sqrt{a_m/a_m} = 1.0$,按本研究模型此级应力作用下各级裂纹都会发生扩

展。曲线③对应于初始长度0.4 mm的裂纹组即将扩展时的应力值：$q/f_t = \sqrt{a_m/a} = \sqrt{0.09/0.4} = 0.474\,3$，此时按本研究模型算得的第1级裂缝扩展长度为40.07 mm，相对韧度为11.19。上述直接计算结果与图像完全吻合，表明串式裂纹系模型是自洽的。

另外，可以利用本算例对本研究的裂纹系模型和现有的单裂纹模型进行对比。试件预制裂缝长度为10 mm，根据曲线①，起裂时轴拉应力为$0.094\,9f_t$。按照现有的单裂纹模型[3-5]，初始裂缝长度$a_0 = 10$ mm，起裂荷载$\sigma_{ini} = 0.094\,9f_t$，则起裂韧度为

$$K_{IC}^{ini} = 0.094\,9f_t\sqrt{\pi \times 10} \tag{38}$$

根据曲线③，断裂时轴拉应力为$0.474\,3f_t$，此时预制裂缝向前扩展了40.1 mm。同样按照现有单裂纹模型[3-5]，临界裂缝长度$a_C = (10 + 40.1)$ mm，极值荷载$\sigma_{max} = 0.474\,3f_t$，则失稳韧度为

$$K_{IC}^{un} = 0.474\,3f_t\sqrt{\pi \times (10 + 40.1)} \tag{39}$$

联立式(38)和式(39)，可得

$$K_{IC}^{un} = 11.19K_{IC}^{ini} \tag{40}$$

与本研究串式裂纹系模型的计算结果吻合。

最后需要说明的是，按模型计算的起裂韧度与失稳韧度之比为1/37.5≈0.03，起裂荷载与失稳荷载之比为0.095，两者均远小于通常试验值。这可能是由于试验观测裂缝宽度的精度有限，预制裂缝尖端扩展初期的微细裂缝没有被发现所致。徐世烺等[4,15,17]利用高精度的光弹性贴片方法测得的该比值约为0.18，而利用较低精度的电阻应变片方法测得的该比值约为0.5~0.6可佐证这点。根据相关规范[18]，取荷载-裂缝嘴张开位移曲线（F-V曲线）上升段由直线转变为曲线的转折点作为起裂点，并指出该转折点多在(0.6~0.9) F_{max}处。预制裂缝宽度$\omega_{1,k}$即为裂缝嘴张开位移V_k，计算前述试件相对应力q_k/f_t与V_k的关系曲线，并将起裂韧度与失稳韧度的比值K^Q/K^S与V_k的关系曲线一并绘入，如图7所示。

由图7可知，按试验室方法取值的起裂荷载为$0.695F_{max}$，起裂韧度与失稳韧度之比为0.533，符合试验规律，证明了串式裂纹系模型的准确性。另外，按模型计算的起裂点预制裂缝宽度约为峰值荷载宽度的7.9%。若试件未预制裂缝，则按模型计算的起裂荷载为$0.244\,9F_{max}$，此时的最大裂缝宽度约为峰值荷载宽度的20.4%。

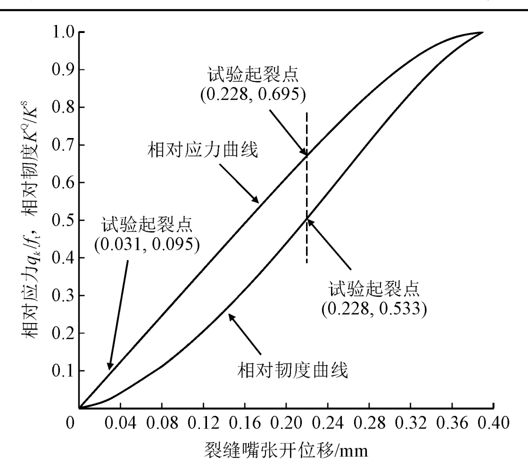


图7 试验起裂点与模型起裂点比较

Fig.7 Comparison of crack initiation point calculated by test and model

3.3 直接拉伸试件双K参数与裂纹系特征参数的关系

对于串式裂纹系模型，起裂韧度K^Q对应于单个裂纹扩展时的断裂韧度，仅受裂纹尖端的应力场控制，应为混凝土材料的力学参数，不受裂纹系几何分布影响。失稳韧度K^S对应于第1级裂纹在最后一级应力作用时的裂尖K值，由于裂纹系几何分布不同，裂纹将产生不同的扩展过程，所以失稳韧度与裂纹系特征参数有关。而通常认为如果试件形状及尺寸相同，那么失稳韧度仅与混凝土强度有关。考察混凝土强度不变的条件下裂纹系几何分布对失稳韧度的影响。由于此时参数l_{mean}相当于参数$\nu(a)$的从变量，所以只需要从两个方面描述裂纹系几何分布的变化：①由σ和a_{mean}控制的裂纹分布形状；②由a_{min}和a_{max}控制的裂纹分布跨度。试件抗拉强度仍取1.0 MPa，在ν_{std}基础上设计了9个对照组，各组参数取值及算得的预制裂缝稳定扩展长度Δa_C、端部相对韧度K^S/K^Q如表1所示。

分析表1结果可知，裂纹分布形状参数σ和a_{mean}及裂纹分布跨度上限a_{max}对失稳韧度无影响，而裂纹分布跨度下限a_{min}对失稳韧度有显著影响：随a_{min}减小，后者明显增大。文献[19]报道，混凝土劈拉强度相同的情况下，使用矿渣水泥或低热微膨胀水泥以及掺入粉煤灰或木钙均可以提高试件的断裂韧度，而掺入加气剂则会降低试件的断裂韧度。根据前述规律，这可能是因为矿渣、粉煤灰和木钙可以填充混凝土内部的微小空隙、微膨胀水泥可以挤紧混凝土胶凝团粒，从而减小试件内部的初始裂纹长度最小值a_{min}；而加气剂引入大量的微气泡，这些气

泡最终将成为初始裂纹的组成部分,如吸附在初始裂纹尖端,从而增加初始裂纹长度最小值 a_{min}。

表 1　裂纹系特征参数对断裂韧度的影响

Tab. 1　Influence of characteristic parameters of crack system on fracture toughness

参数	a_{min}/mm	a_{max}/mm	a_{mean}/mm	σ/mm	l_{mean}/mm	Δa_c/mm	K^S/K^Q
标准	0.09	1.5	0.7	0.31	121	116.5	37.5
分布形状	0.09	1.5	1.1	0.31	206	116.5	37.5
	0.09	1.5	0.3	0.31	59	116.5	37.5
	0.09	1.5	0.7	0.10	112	116.5	37.5
	0.09	1.5	0.7	0.50	133	116.5	37.5
分布跨度	0.02	1.5	0.7	0.31	255	258.3	115.8
	0.20	1.5	0.7	0.31	83	74.9	20.6
	0.09	2.0	0.7	0.31	123	116.5	37.5
	0.09	1.0	0.7	0.31	98	116.5	37.5
	0.02	2.0	0.7	0.31	257	258.3	115.8

4　结　论

1)基于混凝土多裂隙特点提出的裂纹系模型,可以较好地模拟混凝土轴拉构件的宏观断裂过程和微观裂纹扩展过程,其特征参数为几何分布参数——裂纹平均间距、裂纹初始长度及其数量百分比。

2)基于裂纹系模型的理论分析表明,混凝土亚临界扩展现象可能源于混凝土内部初始裂纹系按裂纹长度从长到短逐级开展,而非假想的单个裂缝前端虚拟裂缝面上的黏聚力做功。由此就能解释预制裂缝在亚临界扩展阶段仍然会发生真实可见的延伸的试验现象,回避荷载超过失稳扩展临界点后黏聚力就突然消失、不能再观察到亚临界扩展现象的问题。

3)基于裂纹系模型的数值计算表明,混凝土起裂远早于通常认为的 60% ~90% 峰值荷载,且预制裂缝越长,起裂越早。预制裂缝长度 10 mm 和无预制裂缝的情况下,起裂荷载分别为峰值荷载的 10% 和 25% ,起裂时裂缝宽度分别为峰值荷载宽度的 8% 和 20% 。尽管此阶段试件刚度下降极小,但裂缝实际上已经张开扩展,对要求不出现裂缝试件的计算有影响。混凝土起裂韧度不受初始裂纹系影响,但失稳韧度受初始裂纹系最小长度影响显著。在不提高混凝土强度的条件下,可以通过掺入微细粉末或使用微膨胀水泥等减小初始裂纹系最小长度的手段来提高试件的失稳韧度。

由于混凝土材料内部的微裂纹几乎不可能避免,所以预制裂缝试件内部总会伴有原生的微小裂纹;这表明通过人造裂缝的形式来预制符合假定的混凝土裂纹系基本不可能实现。但是,利用扫描电镜或 CT 观测混凝土切片,并借鉴岩石节理统计方法,可以获得混凝土内部微裂纹长度及位置的分布规律。这样,对于预制裂缝试件,计入这部分以统计手段表示的微裂纹群体后,就能够得到符合假定的完整裂纹系。这将是下一步研究工作的方向。

参考文献:

[1]　黎保琨, 王良元,张松年,等.用激光散斑法进行混凝土断裂力学研究[J].北京水利电力经济管理学院学报,1985,2(2):59-72.
LI Baokun, WANG Liangyuan, ZHANG Songnian, et al. Study on fracture mechanics of concrete by laser speckle method[J]. Journal of Beijing Institute of Economic Management of Water Resources and Electric Power, 1985,2(2):59-72(in Chinese).

[2]　徐世烺,赵国藩.混凝土裂缝的稳定扩展过程与临界裂缝尖端张开位移[J].水利学报,1989,21(4):33-44.
XU Shilang, ZHAO Guofan. The stable propagation of crack in concrete and the determination of critical crack tip opening displacement[J]. Journal of hydraulic engineering, 1989,21(4):33-44(in Chinese).

[3]　徐世烺,赵国藩.光弹性贴片法研究混凝土裂缝扩展过程[J].水力发电学报,1991,10(3):8-18.
XU Shilang, ZHAO Guofan. The investigation on the propagation process of a crack in concrete by means of photoelastic coating[J]. Journal of hydroelectric engineering, 1991,10(3):8-18(in Chinese).

[4]　徐世烺,赵国藩.混凝土结构裂缝扩展的双 K 断裂准则[J].土

木工程学报,1992,25(2):32-38.
XU Shilang, ZHAO Guofan. A double-K fracture criterion for the crack propagatiom in goncrete structures[J]. China civil engineering journal,1992,25(2):32-38(in Chinese).
[5] 徐世烺,赵艳华. 混凝土裂缝扩展的断裂过程准则与解析[J]. 工程力学,2008,25(增刊2):20-33.
XU Shilang, ZHAO Yanhua. Analysis and criterion of fracture process for crack propagation in concrete[J]. Engineering mechanics,2008,25(S2):20-33(in Chinese).
[6] 赵艳华,徐世烺,吴智敏. 混凝土结构裂缝扩展的双G准则[J]. 土木工程学报,2004,37(10):13-18.
ZHAO Yanhua, XU Shilang, WU Zhimin. A dual-G criterion for crack propagation in concrete structures[J]. China civil engineering journal,2004,37(10):13-18(in Chinese).
[7] 徐世烺,张秀芳. 混凝土结构裂缝扩展全过程的新 G_R 阻力曲线断裂判据[J]. 土木工程学报,2006,39(10):19-28.
XU Shilang, ZHANG Xiufang. The new G_R crack extension resistance as a fracture criterion for complete crack propagation in concrete structures[J]. China civil engineering journal, 2006, 39(10):19-28(in Chinese).
[8] 过镇海,时旭东. 钢筋混凝土原理和分析[M]. 北京:清华大学出版社,2003.
[9] BARENBLATT G I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture[M]//DRYDEN H L, VON KÁRMÁN T, KUERTI G, et al. Advances in Applied Mechanics. Amsterdam: Elsevier, 1962:55-129.
[10] 李世愚,和泰名,尹祥础. 岩石断裂力学导论[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2010.
[11] 过镇海,张秀琴. 砼受拉应力-变形全曲线的试验研究[J]. 建筑结构学报,1988,9(4):45-53.
GUO Zhenhai, ZHANG Xiuqin. Experimental investigation of complete stress-deformation curve of concrete in tension[J]. Journal of building structures,1988,9(4):45-53(in Chinese).
[12] HSU T T C, SLATE F O, STURMAN G M, et al. Microcracking of plain concrete and the shape of the stress-strain curve[J]. ACI journal proceedings,1963,60(2):209-224.
[13] LIU T C Y, NILSON A H, SLATE F O. Stress-strain response and fracture of concrete in uniaxial and biaxial compression[J]. ACI journal proceedings,1972,69(5):291-295.
[14] 中国航空研究院. 应力强度因子手册[M]. 北京:科学出版社,1981.
[15] 徐世烺,赵国藩. 巨型试件断裂韧度和高混凝土坝裂缝评定的断裂韧度准则[J]. 土木工程学报,1991,24(2):1-9.
XU Shilang, ZHAO Guofan. Concrete fracture toughness of huge specimens and criterion of fracture toughness for judging cracks in high concrete dam[J]. China civil engineering journal, 1991, 24(2):1-9(in Chinese).
[16] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 混凝土结构设计规范:GB/T 50010—2010[S]. 北京:中国建筑工业出版社,2011.
[17] 徐世烺,周厚贵,高洪波,等. 各种级配大坝混凝土双 K 断裂参数试验研究——兼对《水工混凝土断裂试验规程》制定的建议[J]. 土木工程学报,2006,39(11):50-62.
XU Shilang, ZHOU Hougui, GAO Hongbo, et al. An experimental study on double-K fracture parameters of concrete for dam construction with various grading aggregates[J]. China civil engineering journal,2006,39(11):50-62(in Chinese).
[18] 中华人民共和国国家发展和改革委员会. 水工混凝土断裂试验规程:DL/T 5332—2005[S]. 北京:中国电力出版社,2006.
[19] 徐华荣,朱冠美. 混凝土断裂韧度 K_{IC} 的影响因素的研究[J]. 水利学报,1984,15(9):53-58.
XU Huarong, ZHU Guanmei. Study on influence factors of fracture toughness K_{IC} of concrete[J]. Journal of hydraulic engineering, 1984,15(9):53-58(in Chinese).

（编辑 李坤璐）